数理解析研究所講究録
286巻 1977年 113-121

Foliated bundlesの接続について

北大 理学部　鈴木 治夫

1.　Foliated principal GL_r-bundlesにおける，transverse projectable connectionsの構成と，それによって定まる2次特性コホモロジー類の，一つの性質について考察する．

"微分可能"はC^∞をいみするものとし，微分可能多様体はすべてパラコンパクト，ハウスドルフであると仮定しておく．

$\mathfrak{F}$をn次元微分可能多様体Mの上の，codimension qのfoliationとする．$T(M)$をMの接ベクトル・バンドル，$F\subset T(M)$を，$\mathfrak{F}$のleavesに接するベクトルから成る，部分ベクトル・バンドルとする．Foliation $\mathfrak{F}$をもつ多様体Mを$(M,\mathfrak{F})$とかき，$E(M,p,GL_r)$を$(M,\mathfrak{F})$の上のfoliated principal GL_r-bundleとする．Mはパラコンパクトだから，$E(M,p,GL_r)$の上にリーマン接続が存在する．とくに，剰余ベクトル・バンドル$V_T=T(M)/F$のBott接続[1]により，V_Tのframe bundle $E(V_T)$は，$(M,\mathfrak{F})$の上のfoliated principal GL_r-bundle ($q=r$)となる．これを$E_T(M,p_T,GL_q)$

とかく． Bott 接続は，その transverse connection となる [2]．M_1 を微分可能多様体，$f: M_1 \to M$ を $\mathcal{F}$ に transverse な微分可能写像，$\mathcal{F}_1 := f^*\mathcal{F}$ を，f によって $\mathcal{F}$ から誘導される，M_1 の上の co-dimension q foliation とする． f による $E(M, p, GL_r)$ の誘導バンドルを $f^*E(M, p, GL_r)$ とし，f に対応する principal bundle map を $\bar{f}: f^*E(M, p, GL_r) \to E(M, p, GL_r)$ とかく． $f^*E(M, p, GL_r)$ は，$(M_1, \mathcal{F}_1)$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E(M_1, p_1, GL_r)$ となることが容易にわかる．

$WO_{q,r}$ を differential algebra：$R[c_1, c_2, \cdots, c_s]/(\deg > q) \otimes \Lambda(h_1, h_3, \cdots, h_l)$，($R$ は実数体)，$s := \min(q, r)$，$l := \max\{2i+1 \leq r\}$，$d(c_i) = 0$，$d(h_j) = c_j$ $(j \leq s)$，$q < l$ の場合，$d(h_j) = 0$ $(j > s)$ とする． M 上の複素数係数の微分形式環を $A^*_C(M)$ とかく． M 上の principal GL_r-bundle E の接続 θ の曲率形式に対し，GL_r の Lie 環 gl_r の，次数が q より大きい任意の不変多項式の値が，0 となるならば，θ とリーマン接続 θ^0 とのアファイン結合を用いることにより，一般化された Bott の differential algebra map，$\lambda_{q,r}(\theta): WO_{q,r} \to A^*_C(M)$ が構成され，コホモロジー準同形，$\Delta_{q,r}(\theta): H^*(WO_{q,r}) \to H^*_{DR}(M; C)$ (H_{DR} は de Rham コホモロジー，C は複素数体) が得られる． E が $(M, \mathcal{F})$ 上の foliated principal bundle $E(M, p, GL_r)$ で，θ がその transverse connection ならば，$\Delta_{q,r}(\theta)$ は，θ のとり方によらずに定まる．([1], [2] 参照)． これは，$(M, \mathcal{F})$ の $E(M, p, GL_r)$ の

特性準同形とよばれるものである。　とくに，$WO_q := WO_{q,q}$ とおき，$E=E_r(M, p_r, GL_r)$ にとるとき，$\Delta_{q;r}(\theta)$ は，Bott の特性準同形 $\Delta_q(\mathcal{F}) : H^*(WO_q) \to H^*_{DR}(M; C)$ となる。　WO_q のコサイクルを γ とかく。

M を $q=2r+1$ 次元微分可能多様体，$\mathcal{F}$ を M の上の codimension r の foliation とし，$\mathcal{F}(f)$ を submersion $f: M_1 \to M$ による，M_1 の foliation とする。

定理　$\mathcal{F}$ が non-trivial な Bott の q 次元 2 次特性コホモロジー類，$\Delta_r(\mathcal{F})[\gamma] \neq 0$ をもち，$f^*: H^q(M; R) \to H^q(M_1; R)$ が injective ならば，$(M_1, \mathcal{F}(f))$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E_0(M, p, GL_r) := f^*E(\nu_{\mathcal{F}})$ において，transverse projectable connections ω^0 および ω が存在し，γ に対する 2 次特性コホモロジー類が，それぞれ $\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega^0)[\gamma]=0$ および $\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega)[\gamma] \neq 0$，$([\frac{q}{2}]=r)$ となる。

$\Delta_r(\mathcal{F})[\gamma]$ として，例えば，Godbillon-Vey コホモロジー類，$\Delta_r(\mathcal{F})[c_1^r h_1]$ をとることができ，submersion f として，M のベクトル・バンドルの射影写像をとることができる。

2.　一般に，$\mathcal{F}$ に transverse な微分可能写像，$f: M_1 \to M$ による誘導バンドル，$f^*E(M, p, GL_r) = E(M_1, p_1, GL_r)$ において，次の補題が成立つ。

補題 2，1，　θ，θ^0 および ω を，それぞれ，$(M, \mathcal{F})$ の上

の$E(M,p,GL_r)$の transverse，リーマンおよび transverse projectable connection [2] とするとき，$f^*\theta$，$f^*\theta^0$ および $f^*\omega$ は，それぞれ $(M_1, \mathcal{F}_1)$ の上の $E(M_1, p_1, GL_r)$ の transverse，リーマンおよび transverse projectable connection となる。

証明 $\mathcal{F}_E$を，$\mathcal{F}$の$E(M,p,GL_r)$におけるリフトとし，F_Eを$\mathcal{F}_E$の leaves の接ベクトルから成る，$T(E(M,p,GL_r))$の部分ベクトル・バンドルとする。$\mathcal{F}_{1,E} := f^*\mathcal{F}$ は，$E(M_1, p_1, GL_r)$における$\mathcal{F}_1$のリフトであり，対応する部分ベクトル・バンドルを$F_{1,E}$とかく。$e \in E(M_1, p_1, GL_r)$に対し，$X \in F_{1,E}|e$ ならば，$f_*X \in F_E|_{f(e)}$ だから，$f^*\theta(X) = \theta(f_*X) = 0$ となる。これは，$f^*\theta$が transverse connection であることを示している。Vを$E(M,p,GL_r)$に対応するベクトル・バンドル，v_iをVの局所基底ベクトル場とし，w_iをv_iに対応するf^*Vの局所ベクトル場$(w_i(y) = (v_i(f(y)), y), y \in M_1)$，$i = 1, 2, \cdots, r$とする。$\theta^0$に対応する$V$の接続を$\nabla^0$とするとき，$M_1$の局所接ベクトル場$Y$に対して，

$$(f^*\nabla^0)_Y \langle w_i, w_j \rangle (y) = \nabla^0_{f_*Y(y)} \langle v_i, v_j \rangle (y)$$

$$= \langle (\nabla^0_{f_*Y(y)} v_i, y), (v_j(f(y)), y) \rangle + \langle (v_i(f(y)), y), (\nabla^0_{f_*Y(y)} v_j, y) \rangle$$

$$= \langle (f^*\nabla^0)_Y w_i, w_j \rangle (y) + \langle w_i, (f^*\nabla^0)_Y w_j \rangle (y) .$$

この関係式は，接続の条件の下で保存されるから，f^*Vの任意のベクトル場s_1，s_2に対して拡げられる。Eの任意の局所 section s と，これに対応するf^*Eの局所 section s'をとれば，

$s^*(\bar{f}^*\theta^0)=f^*s^*\theta^0$ となり，したがって $\bar{f}^*\theta^0$ は，f^*V のリーマン接続に対応するから，$E(M_1,p_1,GL_r)$ のリーマン接続となる。

N を，$\mathcal{F}$ に transverse な，M の q 次元局所部分多様体とし，N の上への $\mathcal{F}$ の局所 submersion を h とする。h は $E(M,p,GL_r)$ の局所積構造の開集合 $U\subset M$ の上で定義されるとしてよい。必要ならば，N をさらに小さくとり，M_1 の中に微分可能 q 次元局所部分多様体 N_1 を見出し，f によって，N の上に微分位相同形に写されるようにすることができる。このとき，M_1 の開集合 $U_1\subset f^{-1}(U)$ が存在し，$h_1:=(f|N_1)^{-1}\cdot h\cdot f|U_1 : U_1\to N_1$ は，U_1 における $\mathcal{F}_1$ の局所 submersion となるようにできる。あきらかに，$h\cdot f|U_1=f\cdot h_1$．$E(M,p,GL_r)|U\cong h^*E(M,p,GL_r)|N$，$E(M_1,p_1,GL_r)|U_1\cong h_1^*E(M_1,p_1,GL_r)|N_1$ だから，h および h_1 の covering principal bundle maps，$\bar{h}: E(M,p,GL_r)|U\to E(M,p,GL_r)|N$ および $\bar{h}_1: E(M_1,p_1,GL_r)|U_1\to E(M_1,p_1,GL_r)|N_1$ をえらび，$\bar{h}\cdot\bar{f}|(E(M_1,p_1,GL_r)|U_1)=\bar{f}\cdot\bar{h}_1$ とできる。$E(U):=E(M,p,GL_r)|U$，$E(U_1):=E(M_1,p_1,GL_r)|U_1$ 等とかくことにする。

$\omega|E(U)=\bar{h}^*(\omega|E(N))$ だから，

$$
\begin{aligned}
\bar{f}^*\omega|E(U_1) &= (\bar{f}|E(U_1))^*(\omega|E(U))\\
&= (\bar{f}|E(U_1))^*\cdot\bar{h}^*(\omega|E(N))\\
&= (\bar{h}\cdot\bar{f}|E(U_1))^*(\omega|E(N))\\
&= (\bar{f}\cdot\bar{h}_1)^*(\omega|E(N))\\
&= \bar{h}_1^*(\bar{f}^*\omega|E(N))
\end{aligned}
$$

となる。 したがって，$\bar{f}^*\omega$ は $(M_1, \mathcal{F}_1)$ の上の $E(M_1, p_1, GL_r)$ の，transverse projectable connection である。 証明終

gl_r の不変多項式環を $I(gl_r)$ とかく。 実数体上の $r\times r$ 行列 A に対し，不変多項式 c_i を，$\det(I+tA)=1+\sum_{i=1}^{r} t^i c_i(A)$ (t は不定元) と定めるとき，$I(gl_r)=R[c_1, c_2, \cdots, c_r]$ となることはよく知られている。 $\pi : M\times R\to M$，$\bar{\pi} : E(M, p, GL_r)\times R\to E(M, p, GL_r)$ を自然な射影とする。 $E(M, p, GL_r)$ の接続 θ およびリーマン接続 θ^0 に対し，$\bar{\theta} := \bar{\pi}^*((1-t)\theta+t\theta^0)$ $(t\in R)$ とおく。 $\bar{\theta}$ は $E(M, p, GL_r)\times R$ の接続となる。 $\lambda(\theta)$, $\lambda(\theta^0, \theta) : I(gl_r)\to A_C^*(M)$ を，$\lambda(\theta) := (\frac{1}{2\pi})^i \varphi_i(\Omega)$ (φ_i は i 次元不変多項式，Ω は θ の曲率形式)，$\lambda(\theta^0, \theta)(\varphi_j) := \pi_*(\lambda(\bar{\theta})(\varphi_j)|M\times[0,1])$，$\pi_*$ は trivial bundle π の integration over the fibre と定める。
$d\{\lambda(\theta^0, \theta)(c_{2i-1})\}=\lambda(\theta)(c_{2i-1})$ $(1\leqq 2i-1\leqq r)$ が成立つ ([1], [2]) から，θ の曲率形式に対して，$I(gl_r)$ の k より大きい次数の，任意の多項式の値が 0 となるとき，differential map，$\lambda_{k,r}(\theta) : WO_{k,r}\to A_C^*(M)$ が，$\lambda_{k,r}(\theta)(c_i) := \lambda(\theta)(c_i)$ $(1\leqq i\leqq \min(k, r))$，$\lambda_{k,r}(\theta)(h_j) := \lambda(\theta^0, \theta)(c_j)$ $(j=1, 3, \cdots, l)$ によって定まる。 とくに，$(M, \mathcal{F})$ 上の $E(M, p, GL_r)$ の transverse connection θ に対して，Bott の vanishing theorem により，$\lambda_{q,r}(\theta)$ が定まる。 補題2.1により，$\bar{f}^*\theta$ は $(M_1, \mathcal{F}_1)$ の上の $E(M_1, p_1, GL_r)$ の transverse connection となるから，同様に $\lambda_{q,r}(\bar{f}^*\theta)$ が定まる。

補題2．2． $\lambda_{q,r}(\bar{f}^*\theta)(c_i)=f^*(\lambda_{q,r}(\theta)(c_i))$ $1\leqq i\leqq s$,

$\lambda_{q,r}(\bar{f}^*\theta)(h_j)=f^*(\lambda_{q,r}(\theta)(h_j))$ $j=1, 3, \cdots, l$.

証明 オ1式は，直接の計算により容易に示される．補題2.1により，$\bar{f}^*\theta^0$がリーマン接続であることを注意する．$\pi_1 : M_1 \times R \to M_1$を自然射影とするとき，Integration over the fibre の naturality [3, VII §5 PROP. VIII]により，

$$\begin{aligned}\lambda_{q,r}(\bar{f}^*\theta)(h_j) &= \lambda(\bar{f}^*\theta^0, \bar{f}^*\theta)(c_j) \\ &= \pi_{1*}(\lambda((f\times id)^*\bar{\theta})(c_j) \mid M_1\times[0,1]) \\ &= \pi_{1*}((\tfrac{-1}{2\pi})^j c_j((f\times id)^*\Omega(\bar{\theta})) \mid M_1\times[0,1]) \\ &= f^*\cdot\pi_*((\tfrac{-1}{2\pi})^j c_j(\Omega(\bar{\theta})) \mid M\times[0,1]) \\ &= f^*(\lambda(\theta^0, \theta)(c_j)) \\ &= f^*(\lambda_{q,r}(\theta)(h_j)),\end{aligned}$$

となるから，オ2式が得られる． 証明終

3． 定理の証明．

θを$(M, \mathcal{F})$上の$E_T(M, p_T, GL_r)$の，transverse connectionとする．$f^*E_T(M, p, GL_r)$は，$(M_1, \mathcal{F}_1) = (M_1, f^*\mathcal{F})$の上のfoliated principal GL_r-bundleで，$E_T(M_1, p_1, GL_r)$と一致する．定理の仮定と補題2.2により，

$$[\lambda_{r,r}(\bar{f}^*\theta)(\gamma)] = [f_*(\lambda_{r,r}(\theta)(\gamma))] = f_*\Delta_r(\mathcal{F})[\gamma] \neq 0 .$$

$f^*E(V_{\mathcal{F}})$において，codimension q foliation $\mathcal{F}(f)$のリフトとして，submersion $\bar{f} : f^*E(V_{\mathcal{F}}) \to E(V_{\mathcal{F}})$によるfoliationをとることにより，$f^*E(V_{\mathcal{F}})$は，$(M, \mathcal{F}(f))$の上のfoliated principal GL_r-bundle $E_0(M_1, p_1, GL_r)$となる．$E_T(M, p_T, GL_r)$の上のリーマン接続θ^0，$\mathcal{F}$のtransverse connection θ

をとり，$\omega_i^0 = f^*\theta^0$, $\omega_i = f^*\theta$ とおく． ω^0, ω は共に，$(M_1, \mathcal{F}(f))$ の上の $E_0(M_1, p_1, GL_r)$ の transverse projectable connections で，Bott の strong vanishing theorem が成立つから，$\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega^0)$ および $\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega)$ が定まる． 補題2.1によって，ω^0 はリーマン接続だから，$\lambda_{[\frac{q}{2}],r}(\omega^0)(h_j)=0$ となり，したがって，$\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega^0)[\gamma]=0$ となる．

$$\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega) = [\lambda_{r,r}(\omega)(\gamma)] \neq 0.$$

証明終

$\mathcal{F}$ を M の上の codimension q foliation とする． (M, $\mathcal{F}$) 上の，foliated principal GL_r-bundle $E(M, p, GL_r)$ における，transverse projectable connection ω に対し，$W0_{[\frac{q}{2}],r}$ のコサイクル，

$$\gamma = c_{i_1}\cdots c_{i_\lambda}\otimes h_{j_1}\wedge\cdots\wedge h_{j_\mu}$$

$1\le i_1\le\cdots\le i_\lambda\le s=\min([\frac{q}{2}],r)$, $1\le j_1<\cdots<j_\mu\le l$ (j_β は奇数),

をとるとき，$2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha + j_1) > q+1$ ならば，対応する2次特性コホモロジー類，$\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega)[\gamma]$ は ω のとり方によらない([2])が，γ のコサイクルの条件 $2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha + j_1) > q$ だけでは，例えば $\gamma = c_1^r h_1$ で，$q=2r+1$ のとき，$\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega)[\gamma] = \Delta_{r,r}(\omega)[\gamma]$ が，ω のとり方によって異ることを，定理は示している．

文　献

[1] R. Bott, Lectures on characteristic classes and foliations, Lecture Notes in Mathematics, 279, Springer-Verlag,

Berlin-New York, 1972, 1-76.

[2] H. Suzuki, Characteristic classes of foliated principal GL_r-bundles, Hokkaido Math. J. IV (1975), 159-168.

[3] W. Greub, S. Halperin and R. Vanstone, Connections, curvature, and cohomology, Vol. I, Academic Press, 1972.